Banque « Agro »
A et AE – 0600

Annulée

MATHÉMATIQUES
Épreuve B
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Notations, hypothèses et définitions.

Notations.

Dans tout le problème N désigne un entier naturel non nul, E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ ayant N éléments. On observe l'évolution aléatoire d'un système au cours du temps à des instants successifs supposés entiers naturels (le premier étant l'instant 0 qui correspond à l'état initial).

On sait que le système peut prendre N états qui seront donc représentés par les éléments de E, appelé espace d'états. A chaque instant n, l'état du système est alors un élément, i, de E. On définit ainsi, pour tout entier n, une variable aléatoire à valeurs dans E que l'on notera X_n et qui prend comme valeur l'élément de E représentant l'état observé au temps n.

Pour tout i, de E, on posera : $a_i = P[X_0 = i]$. On définit ainsi une suite de réels positifs ou nuls, $(a_i)_{i\in E}$, vérifiant : (1) $\sum_{i\in E} a_i = 1$.

Propriété d'homogénéité.

Pour tout couple (i,j), d'éléments de E, et pour tout entier naturel n vérifiant $P[X_n = i] \neq 0$, on supposera que la probabilité que le système passe de l'état i à l'instant n à l'état j à l'instant $n+1$ ne dépend pas de n, et on notera $p(i,j)$ cette valeur commune. Plus précisément, on aura donc :

Pour tout n, entier naturel et pour tout (i,j) de $E \times E$, l'égalité :

$$(*)\ P([X_{n+1} = j] \cap [X_n = i]) = p(i,j).P[X_n = i]$$

La famille ainsi définie vérifie :

$$(2)\ \text{pour tout } i \text{ de } E,\ \sum_{j\in E} p(i,j) = 1.$$

Propriété de Markov.

On dira que les variables aléatoires X_n lorsque n décrit $\mathbb{N}$ forment une chaîne de Markov si on a, outre les conditions précédentes, les conditions de Markov :

Pour tout entier naturel k et pour tout $(k+2)$–uplet $(i_0, i_1, \ldots i_k, j)$ d'éléments de E tels que l'évènement $([X_0 = i_0] \cap \ldots \cap [X_k = i_k])$ est de probabilité non nulle :

$$P([X_{k+1} = j]/[X_0 = i_0] \cap \ldots \cap [X_k = i_k]) = P([X_{k+1} = j]/[X_k = i_k]).$$

On dira que l'état atteint à l'instant $k+1$ ne dépend du passé que par l'état atteint à l'instant k.

PARTIE I : Quelques exemples.

1.1. *Exemple 1.*

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

Montrer qu'on définit une chaîne de Markov en notant $E = \{0,1\}$ et X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile au n–ième lancer, 0 sinon. On supposera $P[X_0 = 0] = P[X_0 = 1]$.

Préciser les éléments a_i et $p(i,j)$ lorsque i et j sont des éléments de E.

1.2. *Exemple 2.*

On effectue une suite de tirages indépendants, successifs et honnêtes d'un entier pris parmi $0, 1, -1$; on définit la variable aléatoire Y_n égale à l'entier déterminé au n–ième tirage.

On forme la variable X_n, à valeurs dans $E = \{1,2,3\}$, en posant :

$X_{n+1} = X_n$ si $(Y_{n+1} = 0)$ ou $(Y_{n+1} = 1$ et $X_n = 3)$ ou $(Y_{n+1} = -1$ et $X_n = 1)$

$X_{n+1} = X_n + 1$ si $(Y_{n+1} = 1$ et $X_n < 3)$

$X_{n+1} = X_n - 1$ si $(Y_{n+1} = -1$ et $X_n > 1)$.

Montrer que l'on définit ainsi une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2,3\}$.

On suppose égales les probabilités $P[X_0 = 1]$, $P[X_0 = 2]$ et $P[X_0 = 3]$; déterminer a_1, a_2, a_3, ainsi que $p(i,j)$ pour tout couple (i,j) d'éléments de E. Calculer $P[X_1 = 1]$, $P[X_1 = 2]$, $P[X_1 = 3]$, et déterminer les valeurs respectives de $P[X_n = 1]$, $P[X_n = 2]$, $P[X_n = 3]$, pour tout n entier naturel.

PARTIE II : Propriétés élémentaires.

Dans cette partie, et dans la suivante, on supposera que tous les éléments de E ont à tout instant une chance d'être observés, c'est à dire que

(3) Pour tout i, élément de E, et pour tout n, entier naturel, $P[X_n = i] \neq 0$.

En outre, on supposera pour plus de commodité que $E = \{1 \dots N\}$.

2.1. Vérifier par récurrence que, pour tout n entier naturel, on a bien l'égalité :

$$\sum_{j \in E} P[X_n = j] = 1.$$

2.2. Dans cette question, k est un entier naturel et $(i_0, \dots i_k, j)$ est un $(k+2)$-uplet d'éléments de E. On note $A_k = ([X_0 = i_0] \cap \dots \cap [X_k = i_k])$ et on se propose de démontrer l'égalité :

(4) $P(A_k) = a_{i_0} \times p(i_0, i_1) \times p(i_1, i_2) \times \dots \times p(i_{k-1}, i_k)$.

2.2.a. On suppose que $P(A_k) = 0$,
montrer que $D_k = \{r, 0 \leq r \leq k$ et $P([X_0 = i_0] \cap \dots \cap [X_r = i_r]) = 0\}$ admet un plus petit élément, noté α.
Montrer que $\alpha \neq 0$ et en déduire $p(i_{\alpha-1}, i_\alpha) = 0$. Vérifier enfin la validité de la formule (4) dans ce cas.

2.2.b. On se place à présent dans le cas où $P(A_k) \neq 0$. Justifier alors la formule (4) à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $P(A_r)$, pour $r \in \{0, \dots, k\}$.

Résultat admis :

On admettra que les hypothèses faites permettent de généraliser la propriété de Markov sous la forme suivante :

(5) pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i_1 \dots i_k, j) \in E^{k+1}$,
$P([X_{n+1} = j]/[X_{n_1} = i_1] \cap \dots \cap [X_{n_k} = i_k]) = P([X_{n+1} = j]/[X_{n_k} = i_k])$
dès que $n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$ et $P([X_{n_1} = i_1] \cap \dots \cap [X_{n_k} = i_k]) \neq 0$.

PARTIE III : Probabilités de transition itérées.

Pour tout entier naturel n, et pour tout couple (i, j) d'éléments de E on note

$$p_n(i,j) = P([X_n = j]/[X_0 = i]).$$

Comme $\forall i \in E$, $P[X_0 = i] \neq 0$, cette quantité est bien définie.

3.1. Préciser les valeurs de $p_0(i,i)$ et de $p_1(i,j)$.

3.2.a. Justifier, pour tout $n, n \in \mathbb{N}$, et pour tout j de E, la relation :

$$P([X_{n+1} = j] \cap [X_0 = i]) = \sum_{k \in E} P([X_{n+1} = j] \cap [X_n = k] \cap [X_0 = i]).$$

puis la relation :

$$p_{n+1}(i,j) = \sum_{k \in E} p_n(i,k) \times p(k,j).$$

Indication : On introduira l'ensemble $E_n = \{k \in E, P([X_n = k] \cap [X_0 = i]) \neq 0\}$, sur lequel on effectuera la sommation, puis on montrera que pour tout $k \in E \setminus E_n$ on a $p_n(i,k)p(k,j) = 0$.

3.2.b. On note Q la matrice carrée d'ordre N dont le terme de la ligne i et de la colonne j est égal à $p(i,j)$. Montrer, pour tout n entier naturel, que le terme général de la matrice Q^n est $p_n(i,j)$.

3.2.c. Justifier pour tout couple (m, n) d'entiers naturels l'égalité,

$$P([X_{m+n} = j]/[X_m = i]) = p_n(i,j).$$

Indication : On pourra éventuellement procéder par récurrence sur n
et utiliser le système complet d'évènements $[X_{m+n} = k]$ où k décrit l'ensemble E.

3.3. *Formule de Chapman et Kolmogorov.*
Justifier pour tout j, élément de E :

$$p_{m+n}(i,j) = \sum_{k\in E} p_n(i,k)p_m(k,j).$$

3.4. *Décomposition en classes de E.*
On dira pour des éléments i et j de E que :
1. j est accessible de i s'il existe un entier naturel n tel que $p_n(i,j) > 0$.
2. i et j communiquent si j est accessible de i et i accessible de j. On notera $i \leftrightarrow j$ la relation : i et j communiquent et $C_i = \{j \in E,\ i \leftrightarrow j\}$.

3.4.a. Justifier

$$E = \bigcup_{i\in E} C_i.$$

3.4.b. Montrer que $i \leftrightarrow k$ et $k \leftrightarrow j$ impliquent $i \leftrightarrow j$ (On pourra utiliser la formule du 3.3.)
3.4.c. En déduire que pour deux éléments distincts i et j de E on a: $C_i = C_j$ ou $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Résultat admis.
Soit γ_n une suite de réels compris entre 0 et 1. On admettra que
$\sum_{n\geq 0} \gamma_n s^n$ converge vers $\sum_{n\geq 0} \gamma_n$ lorsque s tend vers 1 à gauche si et seulement si $\sum_{n\geq 0} \gamma_n$ converge.
$\sum_{n\geq 0} \gamma_n s^n$ diverge vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1 à gauche si et seulement si $\sum_{n\geq 0} \gamma_n$ diverge.

PARTIE IV : Eléments récurrents, temps de retour.

Dans cette partie, on supposera seulement que tous les éléments de E ont une chance d'être observés, c'est à dire que :

Pour tout h, élément de E, il existe n, entier naturel, $P[X_n = h] \neq 0$.

On admettra que les résultats démontrés dans les parties précédentes demeurent valides dans ce cas pour des valeurs convenables des entiers n et m. En particulier, si $h \in E$ est tel que $P[X_m = h] \neq 0$, on aura d'après 3.2.c.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n(h,h) = P([X_{n+m} = h]/[X_m = h]).$$

Soit i un élément de E tel que $P[X_0 = i] = 1$. Pour tout entier naturel k non nul, on notera B_k l'évènement "le système est à nouveau en i à l'instant k et n'a jamais été en i aux instants n intermédiaires, (c'est à dire vérifiant : $n \geq 1$ et $n < k$)".
4.1.a. Que signifient, pour tout k, entier naturel non nul, les évènements :

$$\bigcup_{n=1}^{k} [X_n = i] \text{ et } \bigcup_{n=1}^{k} B_n ?$$

4.1.b. En déduire, en utilisant le fait que les évènements B_k, pour $k \geq 1$, sont deux à deux disjoints, l'égalité

$$\sum_{n=1}^{n=k} P[B_n] = P\left[\bigcup_{n=1}^{n=k} [X_n = i]\right]$$

4.1.c. Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} P[B_n] = P\left[\bigcup_{n\geq 1} [X_n = i]\right]$$

4.2. On pose : $b_0 = 0$ et pour tout k, entier naturel non nul, $b_k = P[B_k]$.
4.2.a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que b_k soit non nul, et pour tout entier naturel, n supérieur ou égal à k, on a la relation : $P([X_n = i]/B_k) = P([X_n = i]/[X_k = i])$.
Indication : On sommera sur une famille d'indices $(j_1, \ldots j_r)$ tels que $(j_1 \neq i, \ldots j_r \neq i)$.
4.2.b. En déduire que pour tout n, entier naturel non nul :

$$p_n(i,i) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{n-k}(i,i).$$

4.3.a. Montrer que pour tout $s, s \in [0,1[$, $G(s) = \sum_{n\geq 0} p_n(i,i)s^n$ et $F(s) = \sum_{n\geq 0} b_n s^n$ sont définies, à valeurs dans $\mathbf{R}$.
4.3.b. Montrer que $F(s)$ admet une limite quand s tend vers 1 à gauche.
4.3.c. A l'aide de la question 4.2.b. justifier, pour tout r entier naturel et pour tout s de $[0,1[$ la relation :

$$\sum_{n=0}^{r} p_n(i,i)s^n = 1 + \sum_{k=0}^{r}(b_k s^k \sum_{m=0}^{r-k} p_m(i,i)s^m).$$

On admettra alors qu'on peut, par un passage à la limite sur r, en déduire la relation : pour tout $s \in [0,1[$, $G(s) = 1 + G(s)F(s)$.
4.3.d. Montrer que $G(s)$ tend vers $+\infty$ quand s tend vers 1 si et seulement si $F(s)$ admet pour limite 1 quand s tend vers 1 à gauche.
4.4. Soit $h \in E$. On dit que h est récurrent si la série de terme général $p_n(h,h)$ diverge.
On dit que h est transient si cette série converge.
4.4.a.
Montrer que i est récurrent si et seulement si

$$P(\bigcup_{m\geq 1}[X_m = i]) = 1.$$

et que i est transient si et seulement si cette probabilité est strictement inférieure à 1.
4.4.b. Démontrer que si h est récurrent, alors tous les éléments de C_h le sont aussi.
4.4.c. Montrer que si i est récurrent et $k \geq 1$, on peut définir une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, appelée premier temps de retour en i du système par l'égalité :

$$[T = k] = [X_1 \neq i] \cap \ldots \cap [X_{k-1} \neq i] \cap [X_k = i].$$

FIN